www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.P.I. Lyon - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1990

Série P COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

ATTENTION : Votre copie est destinée à être corrigée et notée. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

Le problème étudie la transformation φ qui, à toute application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associe l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = f(0) \end{cases}$$

On note :
- C l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- C_+ le sous espace de C des fonctions f vérifiant : $\forall x \leqslant 0,\ f(x) = 0$
- C_- le sous espace de C des fonctions f vérifiant : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = 0$.
- C_0 le sous espace de C des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

PARTIE I : Premières propriétés et exemples

1) a) Soit $f \in C$. On suppose qu'il existe $f_0 \in C_0$, $f_+ \in C_+$ et $f_- \in C_-$ telles que : $f = f_0 + f_+ + f_-$.
Déterminer alors les applications f_0, f_+ et f_-.

b) En déduire que $C = C_0 \oplus C_+ \oplus C_-$.

2) a) Montrer que C_0, C_+ et C_- sont stables par φ.

b) f et g étant des éléments de C, on définit f^* et g^* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f^*(x) = f(-x) \text{ et } g^*(x) = g(-x).$$

Vérifier que : si $g = \varphi(f)$ alors $g^* = \varphi(f^*)$.

3) Soit $f \in C$ et $g = \varphi(f)$.

a) Montrer que $g \in C$ et que g est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) Que peut-on dire de g si f est paire ? Si f est impaire ?

4) Montrer que φ est un endomorphisme de C. Est-il injectif ? Surjectif ?

5) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit l'application h_a par : $\begin{cases} h_a(x) = 1 & \text{si } |x| < 1 \\ h_a(x) = |x|^a & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$

Déterminer l'application $\varphi(h_a)$, notée k_a.
Tracer les courbes représentatives de h_a et k_a en distinguant différents cas pour a.

PARTIE II : On étudie l'équation différentielle linéaire
(E) $\alpha xy'+(\alpha-1)\ y = u(x)$ où α est un réel non nul et $u \in C$

1) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation homogène : (EH) $\alpha x\ y' + (\alpha - 1)\ y = 0$

(On posera $\beta = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$).

Parmi les solutions, quelles sont celles dont la limite en 0 est nulle ?

2) Soit f une fonction appartenant à C_+.

a) Montrer que si f est un vecteur propre pour φ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ une équation du type (EH).

b) Déterminer toutes les valeurs propres α de la restriction de φ à C_+. Pour chacune d'elle, donner une base du sous espace propre.

3) On fixe $\alpha \in]0,1[$, on pose $\beta = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \mathrm{Ker}(\varphi - \alpha\mathrm{Id})^n$, où Id est l'endomorphisme identité de C, et $V_n^+ = V_n \cap C_+$.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E_n) : $\alpha xy' + (\alpha - 1)\ y = x^\beta(\ell n\ x)^{n-1}$
où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

b) On définit pour tout $n \geqslant 1$ la fonction u_n par :

$$\begin{cases} \forall x > 0,\ u_n(x) = x^\beta\ (\ell n\ x)^{n-1} \\ \forall x \leqslant 0,\ u_n(x) = 0. \end{cases}$$

Vérifier que $u_n \in C_+$.
Montrer que $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ est une base de V_n^+.

4) Soit (a_n) une suite de réels tous non nuls telle que : $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

a) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ (\ell n\ x)^n$ converge uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+^*$.

Soit : $\alpha \in]0,1[$ et $\beta = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.

On définit alors $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall x > 0,\ S(x) = x^\beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\ell n\ x)^n$.
$\forall x \leqslant 0,\ S(x) = 0$

b) Donner un exemple où $S \notin C_+$.

c) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : (E') $\alpha xy' + (\alpha - 1)y = S(x)$.

PARTIE III : On étudie la restriction de φ à un sous espace de C que l'on munit d'un produit scalaire

Soit L l'ensemble des applications f continues de R dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt$ converge (on note $f^2(t)$ pour $(f(t))^2$).

1) a) Soient f et g dans C.
Démontrer que pour tous réels a et b tels que a < b on a :

$$\left(\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

b) En déduire que si f et g appartiennent à L, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$ converge, et que $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt}\ \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt}$.

c) Montrer que L est un sous espace vectoriel de C.
On notera désormais, pour f et g dans L :

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}.$$

d) Montrer que l'application : $L \times L \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f,g) \longmapsto \langle f|g\rangle$ est un produit scalaire.

Désormais on fixe $f \in L$ et $g = \varphi(f)$.

2) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

a) Pour $x \in [a,b]$, exprimer $xg'(x)$ à l'aide de $g(x)$ et $f(x)$.

En intégrant $\int_a^b g^2(x)dx$ par parties, montrer que :

$$\int_a^b g^2(x)\,dx = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

b) En déduire $\int_a^b g^2(x)\,dx \leqslant a\,g^2(a) + 2\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx}$.

3) a) Etudier suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ le signe de :

$$P(x) = -x^2 + 2x\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx} + a\,g^2(a).$$

b) En déduire que : $\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx} \leqslant \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx}$.

c) Montrer que : $\int_0^{+\infty} g^2(x)\,dx$ converge.

d) En déduire que: $\int_{-\infty}^{0} g^2(x)\,dx$ converge et que L est stable par φ (on pourra considérer f^* et g^* comme en I.2)b).

4) On pourra utiliser le résultat suivant :

$(x,t) \mapsto K(x,t)$

étant une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, si l'une des deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^x |K(x,t)|\, dt \right) dx \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} |K(x,t)|\, dx \right) dt$$

converge.

Alors les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^x K(x,t)\, dt \right) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} K(x,t)\, dx \right) dt$$

convergent et sont égales.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} g^2(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{f(t)\, g(x)}{x}\, dx \right) dt$.

b) 1. Montrer que : $\int_t^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ et $\int_t^{+\infty} \frac{g(x)}{x}\, dx$ convergent absolument pour tout $t > 0$.

2. En intégrant $\int_t^X \left(\int_0^x f(u)\, du \right) \frac{dx}{x^2}$ par parties, en déduire que : $\frac{1}{X} \int_0^X f(u)\, du$ a une limite quand $X \longrightarrow +\infty$.

3. Montrer ensuite que cette limite est nulle et en déduire que :

$$\int_t^{+\infty} \frac{g(x)}{x}\, dx = g(t) + \int_t^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx.$$

c) Calculer : $\int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{f(t)\, f(x)}{x}\, dx \right) dt$.

d) Déduire de ce qui précède que $\int_0^{+\infty} g^2(x)\, dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$.

e) En considérant f^* et g^* comme en I.2)b).
Montrer que : $\|g\|^2 = 2 \langle f | g \rangle$.
En déduire : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall f \in L, \|\varphi(f)\| \leqslant K \|f\|$.

5) Soit a un réel tel que : $-1 < a < -\frac{1}{2}$.

On définit h_a comme en I/5 et $k_a = \varphi(h_a)$. $k_a = \varphi(h_a)$

a) Montrer que $h_a \in L$ et calculer $\|h_a\|^2$ et $\|k_a\|^2$.

b) En faisant tendre a vers $-\frac{1}{2}$.
Montrer que : $\sup \left\{ \frac{\|\varphi(f)\|}{\|f\|} \;/\; f \in L, \|f\| \neq 0 \right\} = 2$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail